DEVOIR SURVEILLÉ

1 Les questions **1)** à **7)** suivantes sont indépendantes.

1) Combien le mot MISSISSIPPI possède-t-il d'anagrammes commençant par une consonne ? Le calcul numérique final n'est pas demandé.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien existe-t-il d'applications $f : [\![1, 2n]\!] \longrightarrow [\![1, 2n]\!]$ pour lesquelles $f(k)$ et k ont la même parité pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$?

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien l'ensemble $[\![1, 3n]\!]$ possède-t-il de parties contenant autant d'entiers divisibles par 3 que d'entiers qui ne le sont pas ? On donnera le résultat sous forme simplifiée, sans symbole $\sum$ notamment. Petit bonus pour celles et ceux qui obtiendront le résultat directement sans aucune simplification finale !

4) Soient E, F et G trois ensembles et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. On suppose $g \circ f$ injective et f surjective. Montrer que g est injective.

5) Pour tout $(X, Y) \in \mathscr{P}(\mathbb{N}) \times \mathscr{P}(\mathbb{N})$, on pose $f(X, Y) = (2X) \cup (2Y + 1)$.

a) L'application f est-elle injective sur $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \times \mathscr{P}(\mathbb{N})$?

b) L'application f est-elle surjective de $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \times \mathscr{P}(\mathbb{N})$ sur $\mathscr{P}(\mathbb{N})$?

6) Exprimer $2\,\mathrm{Arctan}\,3$ en fonction de $\pi - \mathrm{Arctan}\,\dfrac{3}{4}$.

7) Soit $y > 0$ fixé. On note f la fonction $x \longmapsto \mathrm{Arctan}\,\dfrac{x + y}{1 - xy}$ et E son ensemble de définition.

a) Préciser E, puis montrer que f est dérivable sur E et que pour tout $x \in E$: $\quad f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

b) En déduire une expression simplifiée de f sur E.

---

2 On pose $F_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

1) a) Transformer $2\,F_n'(x)\,\sin\dfrac{x}{2}$ en la différence de deux sinus pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que F_n' possède un nombre fini de zéros dans $[0, \pi]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis que pour tout $n \geqslant 2$ et pour tout zéro z de F_n' dans $[0, \pi]$: $\quad F_n(z) \geqslant F_{n-1}(z)$.

Théorème majeur de MPSI, le *théorème des bornes atteintes* affirme que toute fonction continue sur un segment y possède un maximum et un minimum, mais nous l'étudierons plus tard. Pour le moment, nous ferons sans avec les moyens du bord.

2) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux réels pour lesquels $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^1\big([a, b], \mathbb{R}\big)$. On suppose que f' possède un nombre fini de zéros $x_1, \ldots, x_r$ dans $[a, b]$ avec $x_1 < \ldots < x_r$. Ailleurs, f' ne s'annule pas. On pose $x_0 = a$ et $x_{r+1} = b$ — avec éventuellement $x_0 = x_1$ ou $x_r = x_{r+1}$.

Montrer que f possède un minimum sur $[x_i, x_{i+1}]$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, puis qu'elle en possède un sur $[a, b]$.

3) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux réels pour lesquels $a < b$ et $f \in \mathscr{D}\big([a, b], \mathbb{R}\big)$. On suppose que f possède un minimum en un point $c \in]a, b[$. En revenant à la définition du nombre dérivé, montrer que $f'(c) = 0$.

4) Déduire des questions précédentes que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, \pi[$: $\quad F_n(x) > 0 \quad$ (*inégalité de Fejér-Jackson*).

---

3 Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n. On rappelle qu'une permutation de E est une bijection de E sur E. Une application $\pi : E \longrightarrow E$ est dite *idempotente* si $\pi \circ \pi = \pi$. Pour toute application $f : E \longrightarrow E$, on appelle *défaut de f* l'entier $|E \setminus f(E)|$.

Pour tous $a, b \in E$ distincts, on note $\pi_{a,b}$ l'application $x \longmapsto \begin{cases} b & \text{si } x = a \\ x & \text{si } x \neq a \end{cases}$ et $\tau_{a,b}$ l'application $x \longmapsto \begin{cases} b & \text{si } x = a \\ a & \text{si } x = b \\ x & \text{si } x \notin \{a, b\}. \end{cases}$
Les applications $\tau_{a,b}$ sont appelées les *transpositions de E*.

Les questions préliminaires **1)** à **3)** de ce problème sont indépendantes entre elles, indépendantes des suivantes et de difficulté moyenne. Au-delà, les choses se corsent. Les questions **4)** et **5)** sont liées. La question **6)** est indépendante et difficile.

1) Soient $a, b \in E$ distincts. Montrer que $\pi_{a,b}$ est idempotente et calculer son défaut, puis montrer que $\tau_{a,b}$ est une permutation.

2) Déterminer l'ensemble des applications idempotentes injectives de E dans E. Même question avec « surjectives » à la place d'« injectives ».

3) **a)** Soit $\pi : E \longrightarrow E$ une application. Montrer que π est idempotente si et seulement si $\pi(x) = x$ pour tout $x \in \pi(E)$.

b) Soit $d \in [\![0, n-1]\!]$. Combien existe-t-il, en fonction de n et d, d'applications idempotentes de E dans E de défaut d ?

4) On prouve dans cette question par récurrence sur $n = |E|$ que toute permutation de E peut être écrite $\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_r$ pour certaines transpositions $\tau_1, \ldots, \tau_r$ de E (aucune si $r = 0$, auquel cas la composée vide vaut Id_E).

Initialisation : Pour tout ensemble E de cardinal 1, Id_E est la seule permutation de E et elle s'écrit en effet Id_E (composée vide).

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fait l'hypothèse que pour tout ensemble E' de cardinal n, toute permutation de E' peut être écrite $\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_r$ pour certaines transpositions $\tau_1, \ldots, \tau_r$ de E'. Soient E un ensemble de cardinal $n+1$ et σ une permutation de E. Si $\sigma = \mathrm{Id}_E$, le résultat est clair (composée vide). On suppose donc $\sigma \neq \mathrm{Id}_E$.

Montrer l'existence d'une transposition τ de E pour laquelle $\tau \circ \sigma$ possède au moins un point fixe de plus que σ, puis conclure.

5) **a)** Soit $f : E \longrightarrow E$ une application de défaut $d \geqslant 1$. Pourquoi f n'est-elle pas injective ? Montrer l'existence de deux éléments a et b de E pour lesquels d'une part l'application $x \overset{g}{\longmapsto} \begin{cases} b & \text{si } x = a \\ f(x) & \text{si } x \neq a \end{cases}$ est de défaut $d-1$, et d'autre part $f = \pi_{b,f(a)} \circ g$.

b) Montrer par récurrence sur $d \in [\![0, n-1]\!]$ que toute application de E dans E de défaut d peut être écrite sous la forme $\pi_1 \circ \ldots \circ \pi_d \circ \sigma$ pour certaines applications idempotentes $\pi_1, \ldots, \pi_d$ de E dans E de défaut 1 (aucune si $d = 0$) et une certaine permutation σ de E.

c) Compléter pour tous $a, b \in E$ distincts : $\pi_{a,b} \circ \tau_{a,b} = \pi_{?,?}$, puis pour tous $a, b, c \in E$ distincts :

$$\pi_{a,b} \circ \tau_{a,c} = \pi_{?,?} \circ \pi_{?,?}.$$

On montre de même que pour tous $a, b, c \in E$ distincts : $\pi_{a,b} \circ \tau_{b,c} = \pi_{a,b} \circ \pi_{b,c} \circ \pi_{c,a}$ et que pour tous $a, b, c, d \in E$ distincts : $\pi_{a,b} \circ \tau_{c,d} = \pi_{a,c} \circ \pi_{c,d} \circ \pi_{d,a} \circ \pi_{a,b}$.

d) En déduire que toute application de E dans E qui n'est pas une permutation peut être écrite $\pi_1 \circ \ldots \circ \pi_s$ pour certaines applications idempotentes $\pi_1, \ldots, \pi_s$ de E dans E de défaut 1 (*théorème de Howie*).

e) Soit $f : E \longrightarrow E$ une application de défaut $d \geqslant 1$. D'après **d)**, il existe des applications idempotentes $\pi_1, \ldots, \pi_s$ de E dans E de défaut 1 pour lesquelles $f = \pi_1 \circ \ldots \circ \pi_s$. Montrer que $s \geqslant d$.

6) Soit $f : E \longrightarrow E$ une application. On rappelle que $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et $f^k = f \circ \ldots \circ f$ (k termes) pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Soit $x \in E$. Justifier l'existence de deux entiers $k, p \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels $f^{k+p}(x) = f^k(x)$, puis d'un entier $q \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $f^{2q}(x) = f^q(x)$.

b) En déduire que f^r est idempotente pour un certain $r \in \mathbb{N}^*$.